به نامِ خدا

امتحانِ پایانِ ترمِ بیوفیزیک — دانشگاهِ الزهرا ــ دی‌ماهِ ۹۸

مسئله‌یِ ۱) برایِ گونه‌ای از ذرات تولد با نرخِ a، مرگ با نرخِ b، و بالاخره مهاجرت با نرخِ c، را در نظر بگیرید. تحولِ جمعیت بر حسبِ زمان را به دست آورید.

مسئله‌یِ ۲) مدلی ساده برای رشدِ تومورهایِ سرطانی مدلِ زیر است

$$\dot{N} = F(N) = -aN\ln(N/N_c)$$

که N تعدادِ سلول‌هایِ تومور است و $a, N_c > 0$ پارامترهایِ مدل هستند. تا زمانی که N خیلی کوچک نباشد، پیش بینی‌هایِ این مدلِ ساده با داده‌هایِ تجربی‌یِ مربوط به تومورها به طرز شگفت آوری مطابقت دارد.

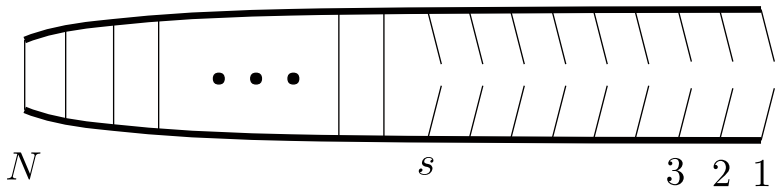
الف‌ــ نقاطِ ثابت در این مدل را به دست آورید.

ب‌ــ به طورِ کیفی نمودارِ $F(N)$ بر حسبِ N را رسم کنید. در موردِ پایداری یا ناپایداری‌یِ این نقاط چه می‌توانید بگویید؟ چرا؟

ج‌ــ چه تعبیرِ فیزیکی‌ای برایِ پارامترهایِ a و N_c دارید؟

د‌ــ به طورِ کیفی نمودارِ $N(t)$ بر حسبِ زمان را برایِ مقادیر اولیه‌یِ مختلف رسم کنید.

مسئله‌یِ ۳) یک ملکولِ DNA شاملِ دو رشته است که مطابقِ شکلِ زیر با N اتصال به هم مربوطاَند. ملکولِ نشان داده شده در شکل در حالتِ s اتصالِ بریده است. دمایِ سیستم T است.



هر اتصال تنها وقتی بریده می‌شود که تمامِ اتصال‌هایِ سمتِ راستِ آن بریده شده باشند. برایِ بریدن هر اتصال انرژیِ ϵ لازم است. بنا بر این انرژی‌یِ متناظر با این شکل $E_s = s\epsilon$ است. وقتی هیچ اتصالی بریده نشده $E_0 = 0$ و وقتی یک اتصال بریده شده $E_1 = \epsilon$، و نهایتاً انرژی‌هایِ ممکن

$$E_0 = 0, \quad E_1 = \epsilon, \quad E_2 = 2\epsilon, \quad E_s = s\epsilon, \quad \cdots, \quad E_N = N\epsilon$$

است.

الف‌ــ تابعِ پارش که با رابطه‌یِ $Z = \sum_{s=0}^{N} \mathrm{e}^{-\beta E_s}$ داده می‌شود را به دست آورید. $\beta := 1/KT$ است.

ب‌ــ انرژی‌یِ متوسط در دمایِ T برابر است با $\bar{E} = -\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$. آن را به دست آورید.

راه‌نمایی:

$$\sum_{s=0}^{N} x^s = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

ج‌ــ تعداد متوسطِ اتصال‌هایی که بریده شده‌اند، $\bar{s} = \bar{E}/N$، را به دست آورید.