

مسئله ۱) الف - شاره‌ای با سرعت متوسط  $v_1$  درون استوانه‌ای به شعاع  $R_1$  در حرکت است. جریان عبوری از شاره  $Q$  یعنی حجم ماده‌ای که در واحد زمان از لوله می‌گذرد چه قدر است؟ اگر این لوله باریک شود و شعاع آن  $R_2$  شود، سرعت متوسط شاره در لوله در حالت پایا چه قدر می‌شود؟

ب - ضخیم‌ترین رگ بدن آئورت است که خون را از بطن چپ قلب دریافت و به اعضای بدن می‌رساند. جریان عبوری از آئورت  $Q \approx 500 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  و قطر آئورت حدود  $2 \text{ cm}$  است. سرعت متوسط جریان خون در آئورت تقریباً چه قدر است؟

ج - جریان خونی که از آئورت می‌گذرد شاخه‌شاخه شده و در شریان‌ها و سپس در رگ‌ها و بالاخره در مویرگ‌ها جاری می‌شود. قطر مویرگ‌ها از مرتبه  $10 \mu\text{m}$  و سطح مقطع همه‌ی آن‌ها روی هم رفته  $4800 \text{ cm}^2$  است. عدد رینولدز برای جریان خون در آئورت و هم‌چنین در مویرگ‌ها تقریباً چه قدر است؟ جریان خون در کدامیک لایه‌ای و در کدامیک تلاطمی است؟ چگالی خون تقریباً  $1.0 \text{ kgm}^{-3}$  و گرانروی آن  $5.0 \times 10^{-3} \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-1}$  است.

مسئله ۲) چرا ما نفس می‌کشیم؟ همان‌طور که مثلاً جوهر در آب پخش می‌شود، در این جا می‌خواهیم زمان پخش اکسیژن از بینی به ریه‌ها را تخمین بزنید. اگر این زمان معقول باشد لازم نیست که نفس بکشیم. اگر کمی صبر کنیم اکسیژن خودش به دلیل پخش از محیط بیرون به ریه‌ها می‌رسد. فاصله‌ی بینی تا ریه‌ها را حدود  $20 \text{ cm}$  و ضریب پخش اکسیژن در هوا را  $D = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  بگیرید. زمان پخش اکسیژن از بینی به ریه‌ها را تخمین بزنید.

مسئله ۳) The Allee effect - این اثر به این معناست که برای خیلی از موجودات، رشد موثر یا آهنگ رشد به نسبت جمعیت (یعنی همان  $\frac{\dot{N}}{N}$ ) نه در  $N$  های خیلی بزرگ و نه در  $N$  های خیلی کوچک اتفاق می‌افتد. در واقع برای  $N$  های خیلی بزرگ رقابت برای غذا و منابع دیگر رشد موثر را سخت می‌کند. علاوه بر این برای  $N$  های خیلی کوچک هم ادامه حیات سخت است. بنا بر این رشد موثر به ازای مقداری متوسط برای  $N$  رخ می‌دهد. مثال زیر را در نظر بگیرید. معادله‌ی

$$\frac{\dot{N}}{N} = F(N) = r - a(N - b)^2$$

را در نظر بگیرید.  $r$ ،  $a$  و  $b$  ثابت‌های مدل و مثبت هستند.

الف - بُعد ثابت‌های مدل  $r$ ،  $a$  و  $b$  چیست؟

ب - به ازای چه مقداری از  $N$ ،  $F(N)$  بیشینه می‌شود؟ مقدار بیشینه چه قدر است؟  $F(N)$  را به طور کیفی رسم کنید.

ج - به ازای چه مقادیری رشد موثر مثبت و به ازای چه مقادیری منفی است؟

د- با مطالعه‌ی تابع  $NF(N)$  نقاط ثابت را به دست آورید. به ازای چه مقادیری از ثابت‌های مدل، نقاط ثابت پایدار و تحت چه شرایطی ناپایدار هستند؟  
 ه- آیا نتیجه‌ی این مدل به ازای هر شرط اولیه‌ی یکسانی با مدل لجستیک فرق کیفی دارد؟ یا نتایج هر دو به ازای شرط اولیه‌ی یکسان به‌طور کیفی یکسان است؟

---

راه‌نمایی: این روابط ممکن است به دردتان بخورد:

$$Q = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \bar{v} A$$

$$\sigma^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = 2Dt, \quad \text{در یک بُعد}$$

$$\text{Re} := \frac{\rho v \ell}{\mu}$$

$$k_B T_r = 4.1 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\zeta = 6\pi\mu a$$

$$\zeta D = k_B T$$