

به نام خدا

دانش گاه الزهرا - اسفند ۹۴

امتحان میان ترم مکانیک تحلیلی II

مسئله ۱) جسمی را از بالای برج میلاد پرتاب می کنیم. می خواهیم ببینیم وقتی این جسم به زمین می خورد نیروی کوریولیس چه قدر باعث انحراف جسم از راستای شاقول شده.

الف- برای جسمی که از برج میلاد با سرعت اولیه $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ رو به پایین پرتاب می کنیم. نسبت نیروی کوریولیس به نیروی وزن، از چه رتبه ای است؟ برج میلاد را حدود ۳۰۰ متر بگیریید.

ب- چه مدت طول می کشد تا جسم به زمین برسد. وقتی این جسم با زمین برخورد می کند چه قدر از راستای شاقول منحرف شده است؟

مسئله ۲) الف- جسمی کروی با چگالی ρ یک نواخت ρ_0 را در نظر بگیرید. فرض کنید شعاع این کره a است. پتانسیل گرانشی ناشی از این کره را در نقطه ای که فاصله اش از مرکز کره r است، چه قدر است؟

ب- حالا فرض کنید که چگالی این کره یک نواخت نیست ولی تقارن استوانه ای دارد با چگالی ρ

$$\rho(\theta) = \rho_0 + \rho_1 \cos \theta.$$

جمله های تک قطبی و دوقطبی متناظر با این توزیع جرم که با روابط زیر داده می شوند را به دست آورید

$$\mathcal{M} := \int dV \rho = \int \rho(\theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\mathbf{P} := \int dV \mathbf{r} \rho = \int \mathbf{r} \rho(\theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

ج- پتانسیل گرانش را در فواصل دور یعنی برای $a \gg r$ به دست آورید. برای این کار از نتایجی که در بندهای قبلی سئوال به دست آورده اید استفاده کنید و پتانسیل را به صورت زیر بسط دهید

$$G(r, \theta) = \frac{Q_0}{r} + \frac{Q_1}{r^2} + \dots$$

Q_0 ، و Q_1 را به دست آورید.