

به نام خدا

امتحان میان‌ترم اول پدیده‌های بحرانی دانش‌گاه الزهرا - اردیبهشت ۹۹

مسئله‌ی ۱) الف - نشان دهید هر تابع هم‌گن دو متغیره

$$f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda) f(x, y)$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x, y) = x^p A\left(\frac{y}{x}\right).$$

ب - نشان دهید هر تابع $x^p A\left(\frac{y}{x}\right)$ یک تابع هم‌گن است.

ج - برای یک سیستم مغناطیسی در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی انرژی آزاد

$$\mathcal{F} \sim |t|^{2-\alpha} g\left(\frac{B}{|t|^\Delta}\right),$$

است. مغناطش و پذیرفتاری مغناطیسی در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی چه رفتاری دارند؟
مسئله‌ی ۲) مدل اسپینی کلاسیکی روی شبکه‌ای یک بعدی با همیلتونی

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_i$$

را در نظر بگیرید، که $\mathbf{B} = B\hat{z}$ است. \hat{z} بردار یکه در راستای محور z است.

الف - در هر جایگاه \mathbf{S}_i را برداری با طول ثابت (مثلاً برای سادگی واحد) بگیرید،
که در غیاب میدان مغناطیسی در هر جهتی می‌تواند قرار گیرد. جای هر اسپین در جمله‌ی
اول

$$\mathbf{S}_i = m\hat{z} + (\mathbf{S}_i - m\hat{z})$$

قرار دهید و جواب خود را تا مرتبه‌ی اول $\mathbf{S}_i - m\hat{z}$ نگه دارید. به جمله‌ی دوم دست نزنید.
همیلتونی را در تقریب میدان میانگین به دست آورید.

راه‌نمایی: در این تقریب همیلتونی شبیه مساله‌ی پارامغناطیس می‌شود.

ب - تابع پارش و انرژی آزاد را در تقریب میدان میانگین به دست آورید.

ج - آیا در تقریب میدان میانگین این سیستم گذار فاز دارد؟

د - در تقریب میدان میانگین نماهای بحرانی β و δ را به دست آورید.
راه‌نمایی:

$$m(t, B=0) \sim t^\beta, \quad m(t=0, B) \sim B^{1/\delta} \quad t := \frac{T - T_c}{T_c}$$