

## مسئله‌ای در مکانیک: نردبانی که کنار دیوار لیز می‌خورد

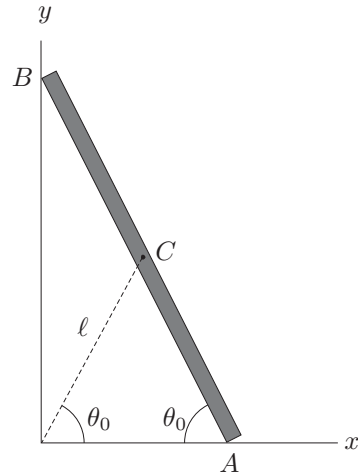
امیر آقامحمدی

چکیده- مسئله‌ی نردبانی که کنار دیوار لیز می‌خورد بدون و با در نظر گرفتن اصطکاک بررسی شده است.

می‌خواهیم حرکت نردبانی کنار یک دیوار را بررسی کنیم. این مسئله از مسائل استاندارد مکانیک است. معمولاً سؤال می‌شود که به ازای چه زاویه‌ای نردبان از دیوار جدا می‌شود؟ ما در این جا می‌خواهیم همین مسئله را با دقت بیشتر بررسی کنیم و به چند سؤال پاسخ دهیم. آیا هرگاه نیروی عمودی‌ی سطح صفر شود معنی‌اش جدا شدن جسم از سطح است؟ علاوه بر این اگر فرض کنیم نردبان از دیوار جدا می‌شود، پس از آن چه می‌شود؟ آیا زمانی وجود دارد که سر دیگر نردبان هم از زمین بلند شود؟ اگر مسئله را بخواهیم کمی واقعی‌تر کنیم لازم است اصطکاک را هم در نظر بگیریم. اگر ضریب اصطکاک نردبان با زمین صفر نباشد در چه زاویه‌ای نردبان از دیوار جدا می‌شود؟

### 1 بررسی حرکت نردبان قبل از جدا شدن از دیوار با چشم‌پوشی از اصطکاک

نردبانی به جرم  $m$  و طول  $2\ell$  که زاویه‌اش با افق  $\theta_0$  است به دیواری تکیه داده و ثابت نگه داشته‌ایم. در ابتدا برای سادگی از اصطکاک بین نردبان با زمین و دیوار چشم‌پوشی می‌کنیم. برای ساده‌سازی به جای نردبان که چهار نقطه‌ی تکیه دارد میله‌ای که دو نقطه‌ی تکیه دارد را به عنوان مدل می‌گیریم.



نردبان را رها می‌کنیم تا لیز بخورد. مکان، سرعت و شتاب مرکز جرم نردبان بر حسب  $\theta$ ، زاویه‌ای که نردبان با زمین می‌سازد، و مشتقات زمانی آن عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{i}l \cos \theta + \mathbf{j}l \sin \theta, \\ \dot{\mathbf{r}}_C &= -\mathbf{i}l\dot{\theta} \sin \theta + \mathbf{j}l\dot{\theta} \cos \theta, \\ \ddot{\mathbf{r}}_C &= -\mathbf{i}l(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + \mathbf{j}l(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta). \end{aligned} \quad (1)$$

نیروهایی که از طرف دیوار و کف زمین به نردبان وارد می‌شوند را  $N_B$  و  $N_A$  می‌گیریم. قانون نیوتن برای نردبان عبارت است از

$$\begin{aligned} N_B &= -m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta), \\ N_A - mg &= m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

معادله‌ی دینامیک دورانی برای گشتاورها حول مرکز جرم عبارت است از

$$N_B \ell \sin \theta - N_A \ell \cos \theta = I_{cm} \ddot{\theta}. \quad (3)$$

از حل سه معادله‌ی اخیر نتیجه می‌شود

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgl \cos \theta}{I_{cm} + m\ell^2}. \quad (4)$$

با ضرب کردن دو طرف این معادله در  $\dot{\theta}$ ، هر دو طرف آن مشتق کامل زمانی می‌شوند و نتیجه‌ی انتگرال‌گیری از آن عبارت است از

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{mgl(1 - \sin \theta)}{I_{cm} + m\ell^2} + C, \quad (5)$$

که  $C$  مقداری ثابت است و با شرایط اولیه تعیین می‌شود

$$C = -\frac{mg\ell(1 - \sin\theta_0)}{I_{cm} + m\ell^2}. \quad (6)$$

پس

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{mg\ell(\sin\theta_0 - \sin\theta)}{I_{cm} + m\ell^2}. \quad (7)$$

می‌توانستیم به جای استفاده از معادله دینامیک دورانی (3) از پایستگی انرژی استفاده کنیم و به رابطه‌ی بالا برسیم. حالا بیایید سرعت و شتاب یک نقطه‌ی دل‌خواه از نردبان، مثل  $S$ ، که در فاصله‌ی  $s$  از مرکز نردبان است، را به دست آوریم. جهت مثبت را در راستای نردبان و به سمت پایین می‌گیریم. در این صورت  $s = \ell$  مربوط به نقطه‌ی  $A$ ، یک نقطه‌ی انتهایی نردبان است آن‌جا که در تماس با زمین است، و  $s = -\ell$  مربوط به نقطه‌ی  $B$ ، نقطه‌ی انتهایی دیگر است یعنی نقطه‌ای که نردبان در تماس با دیوار، است.

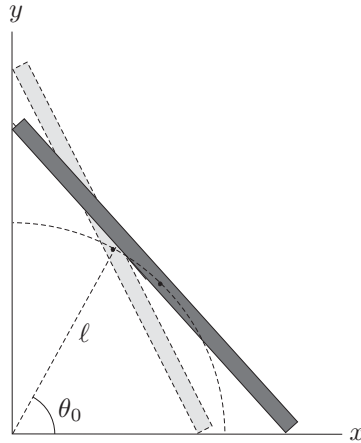
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \mathbf{i}(\ell + s) \cos\theta + \mathbf{j}(\ell - s) \sin\theta, \\ \dot{\mathbf{r}}_S &= -\mathbf{i}(\ell + s)\dot{\theta} \sin\theta + \mathbf{j}(\ell - s)\dot{\theta} \cos\theta, \\ \ddot{\mathbf{r}}_S &= -\mathbf{i}(\ell + s)(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) + \mathbf{j}(\ell - s)(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta). \end{aligned} \quad (8)$$

از این‌جا سرعت و شتاب نقطه‌های  $A$  و  $B$  به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= 2\mathbf{i} \ell \cos\theta, & \dot{\mathbf{r}}_A &= -2\mathbf{i} \ell \dot{\theta} \sin\theta, & \ddot{\mathbf{r}}_A &= -2\mathbf{i} \ell (\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \\ \mathbf{r}_B &= 2\mathbf{j} \ell \sin\theta, & \dot{\mathbf{r}}_B &= 2\mathbf{j} \ell \dot{\theta} \cos\theta, & \ddot{\mathbf{r}}_B &= 2\mathbf{j} \ell (\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta). \end{aligned} \quad (9)$$

با جاگذاری  $\dot{\theta}$  و  $\ddot{\theta}$  و لختی دورانی میله  $I_{cm} = m\ell^2/3$  می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_A &= \frac{3g}{2}(3 \sin\theta - 2 \sin\theta_0) \cos\theta \mathbf{i}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_B &= \frac{3g}{2}(-1 - 2 \sin\theta \sin\theta_0 + 3 \sin^2\theta) \mathbf{j}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_C &= \frac{\ddot{\mathbf{r}}_A + \ddot{\mathbf{r}}_B}{2} \\ &= \frac{3g}{4}(3 \sin\theta - 2 \sin\theta_0) \cos\theta \mathbf{i} + \frac{3g}{4}(-1 - 2 \sin\theta \sin\theta_0 + 3 \sin^2\theta) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$



با استفاده از  $N_1(7,4,2)$  به دست می‌آید

$$N_B = \frac{m^2 g l^2 \cos \theta (3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0)}{I_{cm} + m l^2} \quad (11)$$

در زاویه‌ی  $\theta_1 = \arcsin(\frac{2}{3} \sin \theta_0)$ ،  $N_B = 0$  می‌شود. آیا صفر شدن نیروی عمود بر سطح کافی است تا نتیجه بگیریم که جسم از سطح جدا می‌شود؟ پاسخ منفی است. در لحظه‌ای که نیروی عمود بر سطح می‌شود شتاب عمود بر سطح صفر است. در این لحظه سرعت عمود بر سطح هم صفر است. اما صفر بودن این دو برای جدا شدن جسم از سطح کفایت نمی‌کند. جدا شدن از سطح به این بستگی دارد که یکی از مشتقات بعدی مؤلفه‌ی عمود بر سطح سرعت غیر صفر باشد. ممکن است  $N_B = 0$  مقدار کمی نیروی عمود بر سطح باشد. در این حالت جسم از سطح جدا نمی‌شود. ممکن هم هست که نیروی عمود بر سطح تابعی نزولی باشد. در این صورت پس از این که  $N_B = 0$  شد، تغییر علامت می‌دهد. در این حالت جسم از سطح جدا می‌شود و حتماً یکی از مشتقات بعدی مؤلفه‌ی عمود بر سطح سرعت غیر صفر است. همان‌طور که از (11) می‌بینیم پس از آن که  $\theta$  از  $\theta_1$  می‌گذرد  $N_B$  تغییر علامت می‌دهد. یعنی آن که اگر نردبان مقید باشد که از دیوار جدا نشود پس از گذشتن از  $\theta_1$ ،  $N_B$  منفی می‌شود، یعنی از این پس نیرویی لازم است تا جلوی جدا شدن نردبان از دیوار را بگیرد. فرض کنید به جای آن که نردبان به دیوار تکیه داشته باشد، آن را به میله‌ای تکیه داده باشیم. در انتهای نردبان هم حلقه‌ای باشد و میله از آن حلقه رد شده باشد. در این صورت حرکت میله مقید است. در حین افتادن نردبان مدتی نیروی  $N_B > 0$  است، تا آن که بالاخره در زاویه‌ی  $\theta_1 = \arcsin(\frac{2}{3} \sin \theta_0)$ ،  $N_B = 0$  می‌شود. پس از گذشتن از این زاویه  $N_B < 0$  می‌شود. از این به بعد نیروی  $N$  جلوی جدا شدن نردبان از میله را می‌گیرد. اما در این حالت که چنین قیدی وجود ندارد، نیرویی نیست که جلوی جدا شدن نردبان از دیوار را بگیرد. بنا بر این نردبان از دیوار جدا می‌شود.

با تحلیل ابعادی هم می‌توان چیزهایی در مورد زاویه‌ی جدا شدن نردبان از دیوار گفت. کمیت‌های دخیل در مسئله  $\theta_0, \theta_1, I_{cm}, m, \ell$  و هستند. از این‌ها سه کمیت بی‌بعد  $\theta_0, \theta_1$  و  $\alpha := \frac{I_{cm}}{m\ell^2}$  را می‌توان ساخت. پس

$$\theta_1 = f(\alpha, \theta_0). \quad (12)$$

البته ما در این‌جا  $\alpha$  را  $1/3$  گرفته‌ایم. در هر صورت  $\theta_1$  به جرم و طول نردبان بستگی ندارد. تحلیل ابعادی می‌گوید که به زاویه‌ی اولیه‌ی  $\theta_0$  و ثابت بی‌بعد  $\alpha$  می‌تواند بستگی داشته باشد. هر چند محاسبه‌ی صریح نشان می‌دهد که تنها به  $\theta_0$  بستگی دارد.

تا قبل از این که  $N_B = 0$  شود، مرکز جرم نردبان روی دایره‌ای به شعاع  $\ell$  حرکت می‌کند. زمانی که  $\theta = \theta_1$  شود، سرعت و شتاب‌های نقاط  $A, B$ ، و عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_A &= \mathbf{i} \sqrt{\frac{8g\ell}{9} \sin^3 \theta_0}, & \ddot{\mathbf{r}}_A &= 0, \\ \dot{\mathbf{r}}_B &= -\mathbf{j} \sqrt{2g\ell \sin \theta_0} \cos \theta_1, & \ddot{\mathbf{r}}_B &= -\frac{3g}{2} \mathbf{j}, \\ \dot{\mathbf{r}}_C &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_B}{2}, & \ddot{\mathbf{r}}_C &= -\frac{3g}{4} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (13)$$

سرعت و شتاب نقطه‌ی  $B$  در جهت  $-\mathbf{j}$  است، پس انتظار داریم در راستای  $y$  حرکت کند و  $N_B$  هم‌چنان صفر بماند. بیایید به این سؤال بپردازیم که در لحظه‌ی جدا شدن نردبان همان‌طور که از رابطه‌ی (8) پیداست مؤلفه‌ی افقی مکان سر نردبان و همه‌ی مشتقات زمانی‌ی آن صفرند، پس چرا نردبان جدا می‌شود. در واقع باید ببینیم پس از آن‌که  $N_B = 0$  می‌شود این کمیت‌ها چه می‌شوند. کمیت‌های  $S^\pm$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S_\pm(\theta_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} S(\theta) \Big|_{\theta=\theta_1 \pm \epsilon}. \quad (14)$$

کمیت  $S_+$  ( $S_-$ ) مقدار  $S$  درست پس (قبل) از آن است که  $N_B = 0$  شود. بنا بر این

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_- &= \frac{3g}{4\ell} \sin \theta_1, & \ddot{\theta}_- &= -\frac{3g}{4\ell} \cos \theta_1, \\ x_{A,-} &= 0, & \dot{x}_{A,-} &= 0, & \ddot{x}_{A,-} &= 0, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

برای آن‌که نردبان از دیوار جدا شود باید  $x_B$  بزرگ‌تر از صفر شود. برای آن‌که این اتفاق بیفتد باید وقتی که  $\theta = \theta_1$  می‌شود، حداقل یکی از مشتقات زمانی‌ی  $x_B$  بزرگ‌تر از صفر شود. واضح است که مکان نقطه‌ی  $B$  پیوسته است. برای آن‌که سرعت ناپیوسته باشد باید نیرویی بی‌نهایت به نقطه‌ی  $B$  وارد شود که فیزیکی نیست. پس  $x_{B,+} = 0, \dot{x}_{B,+} = 0$ . حالا باید ببینیم حرکت نردبان از این پس چه می‌شود. مکان مرکز

جرم، سرعت و شتاب آن بر حسب  $x_B$ ،  $\theta$  و مشتقات آن‌ها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} x_c &= x_B + \ell \cos \theta, & y_c &= \ell \sin \theta, \\ \dot{x}_c &= \dot{x}_B - \ell \dot{\theta} \sin \theta, & \dot{y}_c &= \ell \dot{\theta} \cos \theta, \\ \ddot{x}_c &= \ddot{x}_B - \ell(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta), & \ddot{y}_c &= \ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \end{aligned} \quad (16)$$

انرژی مکانیکی پایسته است. چون نیروی افقی وجود ندارد مولفه‌ی  $x$  تکانه‌ی خطی مرکز جرم پایسته است، پس  $\dot{x}_c$  ثابت می‌ماند. انرژی عبارت است از

$$E = mgl \sin \theta_0 = \frac{m}{2}(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 + mgl \sin \theta \quad (17)$$

و پس از آن که  $N_B = 0$  می‌شود

$$mgl \sin \theta_0 = \frac{m}{2}[\dot{x}_{B,+}^2 + \ell^2 \dot{\theta}_+^2 - 2\dot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+ \sin \theta_+] + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}_+^2 + mgl \sin \theta_+ \quad (18)$$

$$\ddot{x}_{B,+} = \ell(\ddot{\theta}_+ \cos \theta_+ - \dot{\theta}_+^2 \sin \theta_+). \quad (19)$$

با استفاده از  $\dot{x}_{B,+} = 0$  و جاگذاری در (18) نتیجه می‌دهد

$$\dot{\theta}_+^2 = \dot{\theta}_-^2 = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta_+, \quad (20)$$

اگر از (18) نسبت به زمان مشتق بگیریم

$$\begin{aligned} m[\dot{x}_{B,+}\ddot{x}_{B,+} + \ell^2\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ - \ddot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+ \sin \theta_+ - \dot{x}_{B,+}\ell\ddot{\theta}_+ \sin \theta_+ - \dot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+^2 \cos \theta_+] \\ + I_{cm}\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ + mgl\dot{\theta}_+ \cos \theta_+ = 0, \\ \Rightarrow (m\ell^2 + I_{cm})\ddot{\theta}_+ - m\ell \sin \theta_+\ddot{x}_{B,+} + mgl \cos \theta_+ = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

که همراه با (19) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{A,+} = \ddot{x}_{A,-} = 0, \\ \ddot{\theta}_+ = \ddot{\theta}_- = -\frac{3g}{4\ell} \cos \theta_+, \end{aligned} \quad (22)$$

با مشتق‌گیری از (19) و معادله‌ی اول (21) می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{B,+} &= \ell\ddot{\theta}_+ \sin \theta_+ + 3\ell\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ \cos \theta_+ - \ell\dot{\theta}_+^3 \sin \theta_+, \\ 0 &= m[\ell^2\ddot{\theta}_+^2 + \ell^2\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ - \ddot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+ \sin \theta_+] + I_{cm}\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ \\ &\quad + I_{cm}\ddot{\theta}_+^2 + mgl\dot{\theta}_+ \cos \theta_+ - mgl\dot{\theta}_+^2 \sin \theta_+. \end{aligned} \quad (23)$$

با حل این دو معادله  $\ddot{\theta}_+$  و  $\ddot{x}_+$  به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_+ &= -\sqrt{\frac{27g^3}{16\ell^3} \sin^3 \theta_1}, \\ \ddot{x}_{B,+} &= \frac{27}{8} \sqrt{\frac{g^3 \sin \theta_1}{3\ell}}.\end{aligned}\quad (24)$$

این نتیجه با جداشدن نردبان از دیوار سازگار است.

## 2 حرکت نردبان پس از جدا شدن از دیوار

حالا بیا باید حرکت نردبان پس از جدا شدن از دیوار را بررسی کنیم. پس از جدا شدن نردبان از دیوار پایستگی انرژی نتیجه می‌دهد

$$mgl \sin \theta_0 = \frac{m}{2}(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 + mgl \sin \theta \quad (25)$$

که همراه با پایستگی مولفه  $x$  سرعت مرکز جرم نردبان

$$\dot{x}_c = -\ell\dot{\theta} \sin \theta \Big|_{\theta=\theta_1} = \sqrt{\frac{2g\ell \sin^3 \theta_0}{9}} \quad (26)$$

منجر می‌شود به

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g[\sin \theta_0 - \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta_0}{9}]}{\ell(3 \cos^2 \theta + 1)} \quad (27)$$

معادلات حاکم بر حرکت نردبان عبارت اند از

$$\begin{aligned}N_A - mg &= m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \\ N_A \ell \cos \theta &= -I_{cm}\ddot{\theta}.\end{aligned}\quad (28)$$

زمانی که نردبان بخواهد از زمین بلند شود  $N_A = 0$  و در نتیجه  $\ddot{\theta} = 0$  و بالاخره  $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{\ell \sin \theta}$  می‌شود.

اگر این اتفاق بخواهد رخ دهد در زاویه‌ای مثل  $\theta_2$  رخ می‌دهد که

$$\frac{g}{\ell \sin \theta_2} = \frac{6g[\sin \theta_0 - \sin \theta_2 - \frac{\sin^3 \theta_0}{9}]}{\ell(3 \cos^2 \theta_2 + 1)}.\quad (29)$$

با ساده کردن این معادله می‌رسیم به

$$\sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_2 (\sin \theta_0 - \frac{\sin^3 \theta_0}{9}) + \frac{4}{3} = 0 \quad (30)$$

که جواب آن

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_0 - \frac{\sin^3 \theta_0}{9} \pm \sqrt{\left(\sin \theta_0 - \frac{\sin^3 \theta_0}{9}\right)^2 - \frac{4}{3}} \quad (31)$$

اما چون  $1 < \sin \theta_0 - \frac{\sin^3 \theta_0}{9}$  است، زیر رادیکال هم‌واره منفی است و جواب قابل قبولی برای  $\theta_2$  وجود ندارد. بنا بر این  $N_A \neq 0$  است و نردبان از زمین بلند نمی‌شود. زمانی که نردبان افقی می‌شود

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g\left[\sin \theta_0 - \frac{\sin^3 \theta_0}{9}\right]}{2\ell}} \quad (32)$$

### 3 بررسی حرکت نردبان قبل از جدا شدن از دیوار با در نظر گرفتن اصطکاک بین نردبان و زمین

بباید اصطکاک بین نردبان با زمین را در نظر بگیریم. برای سادگی محاسبه در این جا ما هم‌چنان از اصطکاک بین نردبان و دیوار چشم‌پوشی می‌کنیم. ضریب اصطکاک بین نردبان با زمین،  $\mu$  را کوچک ولی غیرقابل چشم‌پوشی می‌گیریم. نردبان را رها می‌کنیم تا لیز بخورد. می‌خواهیم ببینیم به ازای چه مقداری از  $\theta$  نردبان از دیوار جدا می‌شود؟<sup>†</sup> این زاویه را  $\theta_2$  می‌گیریم و آن را تا مرتبه‌ی اول  $\mu$  به دست می‌آوریم. قانون نیوتن برای نردبان عبارت است از

$$\begin{aligned} N_B - \mu N_A &= -m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta), \\ N_A - mg &= m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta). \end{aligned} \quad (33)$$

معادله‌ی دینامیک دورانی برای گشتاورها حول مرکز جرم عبارت است از

$$N_B \ell \sin \theta + \mu N_A \ell \sin \theta - N_A \ell \cos \theta = I_{cm} \ddot{\theta}. \quad (34)$$

از حل (33) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} N_B &= \mu mg - m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + \mu m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \\ N_A &= mg + m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \end{aligned} \quad (35)$$

که با جاگذاری در (34) و ساده کردن نتیجه می‌رسد به

$$(I_{cm} + m\ell^2)\ddot{\theta} - 2\mu m\ell^2 \sin \theta(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = mgl(2\mu \sin \theta - \cos \theta). \quad (36)$$

<sup>†</sup> برای آشنایی‌ی مقدماتی با روش اختلال می‌توانید مرجع [۱] را ببینید.



اگر  $\mu$  صفر بود حل معادله مثل مسئله قبلی بود اما حالا که  $\mu \neq 0$  است تا مرتبه‌ی صفرم اختلال جواب معادله‌ی (36)

$$\begin{aligned} [\dot{\theta}^{(0)}]^2 &= \frac{2mg\ell(\sin\theta_0 - \sin\theta)}{I_{cm} + m\ell^2}, \\ \ddot{\theta}^{(0)} &= -\frac{mg\ell \cos\theta}{I_{cm} + m\ell^2}, \end{aligned} \quad (37)$$

است. جواب معادله‌ی (36) تا مرتبه‌ی اول  $\mu$  را

$$\dot{\theta}^2 = [\dot{\theta}^{(0)}]^2 + \mu F(\theta) \quad (38)$$

می‌گیریم. از این جا نتیجه می‌شود

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}^{(0)} + \frac{\mu}{2} \frac{d}{d\theta} F(\theta). \quad (39)$$

توجه داریم که شرط اولیه منجر می‌شود به  $F(\theta_0) = 0$ . با جاگذاری‌ی (38) و (39) در (36) و ننگه

داشتن جملات تا مرتبه‌ی اول  $\mu$  می‌رسیم به

$$(I_{cm} + m\ell^2) \frac{d}{d\theta} F(\theta) = 4mg\ell \sin\theta \left[ \frac{m\ell^2(-2\sin\theta_0 \sin\theta + 3\sin^2\theta - 1)}{I_{cm} + m\ell^2} + 1 \right]. \quad (40)$$

با استفاده از  $I_{cm} = \frac{m\ell^2}{3}$  می‌رسیم به

$$\frac{d}{d\theta} F(\theta) = \frac{3g}{4\ell} [9\sin^3\theta - 6\sin^2\theta \sin\theta_0 + \sin\theta] \quad (41)$$

حالا کافی است از این معادله انتگرال بگیریم و از  $F(\theta_0) = 0$  استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} F(\theta) = & \frac{3g}{4\ell} [3(\cos^3\theta - \cos^3\theta_0) - 10(\cos\theta - \cos\theta_0) - 3(\theta - \theta_0) \sin\theta_0 \\ & + \frac{3}{2}(\sin 2\theta - \sin 2\theta_0) \sin\theta_0] \end{aligned} \quad (42)$$

با داشتن  $F(\theta)$ ،  $\dot{\theta}^2$  و  $\ddot{\theta}$  را تا مرتبه‌ی اول داریم. با جاگذاری‌ی این‌ها در (35) و ساده کردن نتیجه

معادله‌ای که زاویه‌ی جداشدن  $\theta_2$  را می‌دهد عبارت است از

$$\begin{aligned} N_B(\theta_2) = & \mu mg - m\ell \left[ -\frac{3g}{4\ell} \cos\theta_2 + \frac{\mu}{2} F'(\theta_2) \right] \sin\theta_2 + \\ & -m\ell \left[ \frac{3g}{2\ell} (\sin\theta_0 - \sin\theta_2) + \mu F(\theta_2) \right] \cos\theta_2 \\ & + \mu m\ell \left[ -\frac{3g}{4\ell} \cos^2\theta_2 + \frac{3g}{2\ell} (\sin\theta_0 - \sin\theta_2) \sin\theta_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

توجه داریم که چون ما جواب را تا مرتبه‌ی اول  $\mu$  می‌خواهیم جملات داخل کروشه در خط آخر را تا مرتبه‌ی

صفرم ننگه داشته‌ایم. اگر  $\mu$  صفر بود نردبان در زاویه‌ی  $\theta_1 = \arcsin(\frac{2}{3} \sin\theta_0)$  از دیوار جدا می‌شد. بنا

بر این زاویه‌ی جدا شدن در این حالت،  $\theta_2$ ، تا مرتبه‌ی صفرم  $\mu$  همان جواب قبلی است و

$$\theta_2 = \theta_1 + \delta\theta. \quad (44)$$

از این جا نتیجه می شود

$$\begin{aligned}\sin \theta_2 &= \sin(\theta_1 + \delta\theta) \approx \sin \theta_1 + \delta\theta \cos \theta_1, \\ \cos \theta_2 &\approx \cos \theta_1 - \delta\theta \sin \theta_1.\end{aligned}\quad (45)$$

توجه داریم که  $\delta\theta$  از مرتبه  $\mu$  است. با جاگذاری این ها در (43) و نگه داشتن جملات تا مرتبه اول  $\mu$ ،  $\delta\theta$  و در نتیجه  $\theta_2$  به دست می آید. اگر فرض کنیم که نردبان در ابتدا قائم بوده  $\theta_0 = \pi/2$ ، روابطمان ساده تر می شود

$$\begin{aligned}F(\theta) &= \frac{3g}{4\ell} [3 \cos^3 \theta - 10 \cos \theta - 3(\theta - \pi/2) + \frac{3}{2} \sin 2\theta] \\ F'(\theta) &= \frac{3g}{4\ell} [-9 \cos^2 \theta \sin \theta + 10 \sin \theta - 3 + 3 \cos 2\theta], \\ \sin \theta_2 &\approx \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \delta\theta, \\ \cos \theta_2 &\approx \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\theta,\end{aligned}\quad (46)$$

با استفاده از همه ی این ها نتیجه می شود  $\delta\theta = -1.57\mu$  و

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - 1.57\mu \quad (47)$$

اگر  $\mu$  صفر باشد زاویه ی جدا شدن نردبان  $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41.8^\circ$  است. با فرض  $\mu = 0.1$

$$\theta_2 \approx 34.7^\circ. \quad (48)$$

توجه داریم که مثلاً اگر  $\mu = 0.4$  باشد تقریب تا مرتبه اول به درد نمی خورد زیرا جمله ی مرتبه اول از همان مرتبه ی جمله ی مرتبه ی صفرم می شود.

### مراجع

۱- امیر آقامحمدی؛ اختلال: گاما، شماره ی ۴ (پاییز ۱۳۸۳)، ۳۹ تا ۵۳