دانشگاه الزهرا – دانشکده علوم اجتماعی و اقتصاد

اقتصادسنجی کارشناسی ارشد

برآورد مدل‌های خطی با جملات اخلال غیر کروی:

ESTIMATION OF LINEAR MODELS WHIT NONSPHERICAL DISTURBANCES

استاد: دکتر صفرزاده

اردیبهشت ۹۹

برآورد کننده MLE

فرض کنید مدل خطی زیر را داشته باشیم:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad \& \quad \varepsilon \sim N\left(o, \sigma^{۲}\Omega\right) \quad (۱)$$

که در آن Ω یک ماتریس مثبت معین با درجه n است. همانطور که ملاحظه می‌شود جملات اخلال این مدل غیر کروی (Nonspherical) است. فرض می‌شود که ماتریس Ω معلوم است. به عنوان مثال واریانس جملات اخلال در هر نقطه نمونه ای، نسبتی از مجذور یکی از متغیرهای توضیحی مثلا" $X_{۲}$ است.

$$\operatorname{var}\left(\varepsilon_i\right) = \sigma_i^{۲} = \sigma^{۲} X_{۲i}^{۲} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

که درآن $\sigma^{۲}$ عامل مقیاس است. بر این اساس ماتریس واریانس-کوواریانس جملات اخلال به شکل زیرخواهد بود:

$$\text{var-cov}(\varepsilon)=\sigma^{۲}\begin{bmatrix} X_{۲۱}^{۲} & o & \cdots\cdots & o \\ o & X_{۲۲}^{۲} & \cdots\cdots & o \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ o & o & \cdots\cdots & X_{۲n}^{۲} \end{bmatrix}=\sigma^{۲} diag\left[X_{۲۱}^{۲} \quad X_{۲۲}^{۲} \quad \ldots\ldots \quad X_{۲n}^{۲}\right]$$

براساس رابطه (۱) چگالی نرمال چند متغیره ε به صورت زیرخواهد بود:

$$f(\varepsilon)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\sigma^2\Omega|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\varepsilon'(\sigma^2\Omega)^{-1}\varepsilon\right]$$

توجه شود که $|\sigma^2\Omega|=\sigma^{2n}|\Omega|$ است. می‌توانیم تابع چگالی را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f(\varepsilon)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}(\Omega)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\varepsilon'\Omega^{-1}\varepsilon\right]$$

بنابراین Log Likelihood به صورت زیراست:

$$L=-\frac{n}{۲}\ln(۲\pi)-\frac{n}{۲}\ln\sigma^{۲}-\frac{۱}{۲}\ln(\Omega)-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}}(Y-X\beta)'\Omega^{-۱}(Y-X\beta) \qquad (۲)$$

$$F.O.C\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial\beta}=\dfrac{۱}{\sigma^{۲}}\left(X'\Omega^{-۱}Y-X'\Omega^{-۱}X\beta\right)=o\\ \dfrac{\partial L}{\partial\sigma^{۲}}=-\dfrac{n}{۲\sigma^{۲}}+\dfrac{۱}{۲\sigma^{۴}}(Y-X\beta)'\Omega^{-۱}(Y-X\beta)=o\end{cases}$$

$$b=\left(X'\Omega^{-۱}X\right)^{-۱}X'\Omega^{-۱}Y \qquad (۳)$$

$$\hat{\sigma}^{۲}=\frac{۱}{n}(Y-Xb)'\Omega^{-۱}(Y-Xb) \qquad (۴)$$

البته این برآورد کننده‌ها زمانی عملی خواهند بود که ماتریس Ω معلوم باشد.

حداقل مربعات تعمیم یافته GLS (Generalized Least Squares)

از آنجا که ماتریس Ω مثبت معین است، معکوس آن نیز مثبت معین خواهد بود؛ بنابراین می‌توان ماتریس غیر منفرد P را پیدا کرد به طوری که:

$$\Omega^{-1} = P'P \qquad (5)$$

اگر این رابطه در معادله (۳) جایگذاری شود، خواهیم داشت:

$$b = (X'P'PX)^{-1} X'P'PY = \left[(PX)'(PX)\right]^{-1} (PX)'(PY)$$

این برآوردکننده دقیقا همان برآوردکننده OLS برای رگرسیون PY روی PX است که این متغیرها تبدیلات متغیرهای اصلی Y و X است. همانطور که مشاهده می‌شود این برآورد کننده یک راه تبدیل برای برآوردکننده‌های MLE برای مدل‌های غیرکروی است.

پیش ضرب مدل خطی $Y = X\beta + \varepsilon$ درماتریس غیر منفرد P ، معادله (۵) را تامین خواهد کرد.

$$Y_* = X_*\beta + \varepsilon_* \qquad (۶)$$

که در آن

$$Y_* = PY \quad , \quad X_* = PX_* \quad , \quad \varepsilon_* = P\varepsilon$$

از رابطه (۵) می‌توان نوشت:

$$\Omega^{-۱} = P^{-۱}(P')^{-۱}$$

پس:

$$\begin{aligned} Var - Cov(\varepsilon_*) &= E(P\varepsilon\varepsilon' P') \\ &= \sigma^۲ P\Omega P' \\ &= \sigma^۲ PP^{-۱}(P')^{-۱} P' \\ &= \sigma^۲ I \end{aligned}$$

بنابراین متغیرهای تبدیل یافته در رابطه (۶) شرایطی را فراهم می‌کند که برآورد کننده های OLS ، BLUE باشند. بردار ضرایب به دست آمده به روش OLS از رگرسیون Y_* روی X_* همان برآوردکننده حداقل مربعات تعمیم یافته (GLS) است.

$$b_{GLS} = \left(X_*'X_*\right)^{-1} X_*'Y_*$$
$$= \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y \qquad (۷)$$

ملاحظه می‌شود که همان برآورد کننده MLE است که در رابطه (۳) معرفی شد. از روش شناسی OLS به طور مستقیم می‌توان نوشت:

$$\operatorname{var}\left(b_{GLS}\right) = \sigma^2 \left(X_*'X_*\right)^{-1}$$
$$= \sigma^2 \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} \qquad (۸)$$

که همان ماتریس واریانس مجانبی بدست آمده از روش MLE است. برآورد کننده بدون تورش برای σ^{2} در رابطه (۸) را می‌توان از روش OLS به صورت زیر بدست آورد:

$$
\begin{aligned}
s^{2} &= \frac{\left(Y_{*}-X_{*}b_{GLS}\right)'\left(Y_{*}-X_{*}b_{GLS}\right)}{\left(n-k\right)} \\
&= \frac{\left[P\left(Y-Xb_{GLS}\right)\right]'\left[P\left(Y-Xb_{GLS}\right)\right]}{\left(n-k\right)} \qquad (۹) \\
&= \frac{\left(Y-Xb_{GLS}\right)'\Omega^{-1}\left(Y-Xb_{GLS}\right)}{\left(n-k\right)}
\end{aligned}
$$

که این برآورد کننده متفاوت از برآورد کننده تورش دارMLE بوده و که میزان اختلاف آنها $\frac{n}{n-k}$ است.

ازآنجا که معادله (۶) شرایط به کارگیری OLS را تامین می‌کند آزمون قیدهای خطی برای نمونه‌های محدود به صورت زیرخواهد بود:

$$H_o : R\beta = r$$

$$F = \frac{\left(r - Rb_{GLS}\right)'\left[R\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}R'\right]^{-1}\left(r - Rb_{GLS}\right)/q}{s^2} \sim F_{q,n-k} \qquad (۱۰)$$

روش برآورد GLS کاربردهای فراوانی در اقتصادسنجی دارد. بالاخص در مواردی که جملات اخلال دارای مشکل واریانس ناهمسانی و یا خود همبستگی هستند. البته کاربست این روش همانطور که در مورد MLE هم ذکر شد؛ منوط به معلوم بودن ماتریس Ω است و در صورت معلوم نبودن این ماتریس باید در ابتدا پارامترهای نامعلوم آن از طریق برآوردهای سازگار جایگزین شود که دراین صورت روش GLS به FGLS تبدیل می‌شود. در خیلی موارد به جای اینکه مثل رابطه (۱) از $\varepsilon \sim N\left(o,\sigma^{2}\Omega\right)$ استفاده شود از رابطه $\varepsilon \sim N\left(o,V\right)$ استفاده میشود. که در آن V ماتریس واریانس کواریانس بوده و مثبت معین است. یعنی در این رویکرد، عامل مقیاس σ^{2} تفکیک نمی‌شود؛ که بر این اساس خواهیم داشت:

$$b_{GLS}=\left(X'V^{-1}X\right)^{-1}X'V^{-1}Y$$
$$\operatorname{var}\left(b_{GLS}\right)=\left(X'V^{-1}X\right)^{-1} \qquad (۱۱)$$